graphe G → graphe intérieur G_I ("oublié des sensorielles et des commandes)

graphe G → ens. des sommets G_S

Chapitre 3

N O Y A U X

Plus que jamais, <u>flèche</u> abrège <u>flèche non sommet</u>, et tout graphe ambiant se soumet à l'axiome de commodité qui lui impose une flèche de sortie au moins, en chaque sommet.

Tout sous-graphe revient à son <u>coloriage caractéristique</u>
qui rougit les flèches du sous-graphe
et bleuit les autres flèches du graphe ambiant.

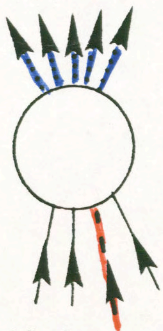
Un sous-graphe N et son coloriage caractéristique
seront dits <u>nucléiques</u>

si et seulement si

tout sommet du graphe ambiant vérifie la

<u>Condition de nucléicité</u>

sortie — toute bleue — toute rouge



en particulier

pour

toute entrée — à flèche rouge — sans flèche rouge

sri $\operatorname{im} N = C$ dans N
sri image et domaine sont complémentaires

et $N_a = G_a$ en tout point a
(N_a = ens. des flèches d'origine a du graphe N)

Comme tout coloriage nucléique
présente une flèche d'entrée rouge ou une flèche de sortie rouge
en tout sommet du graphe ambiant (soumis à l'axiome de commodité)
Tout graphe et ses sous-graphes nucléiques ont mêmes sommets

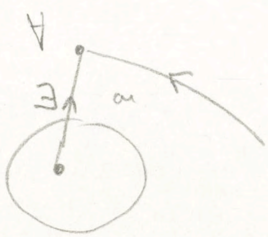
Le domaine dom G et l'image im G d'un graphe G
sont les ensembles respectifs
des origines et des extrémités de ses flèches.

Noyau de graphe signifie Domaine de sous-graphe nucléique
et donc encore
Ensemble des origines des flèches rouges d'un coloriage nucléique

Ensemble intérieurement stable d'un graphe
signifie
ensemble S de sommets d'un graphe G
tel que
aucune flèche de G n'ait origine et extrémité dans S

$G_I(E) \subset CE$

Ensemble extérieurement stable d'un graphe
signifie
ensemble S de sommets d'un graphe G
tel que tout sommet de G hors S
soit l'extrémité d'au moins une flèche de G sans origine hors S



$G(E) \supset CE$

: Théorème 2 -- :
:   :
:   Les noyaux d'un graphe sont ses ensembles   :
:   :
:   intérieurement et extérieurement stables   :
:   :
: -------------------------------- Christine Decaestecker, 1985 :

<u>Nécessité</u>.

Voici un noyau N du graphe G et un coloriage nucléique de G dont N soit l'ensemble des origines des flèches rouges.

On doit prouver N intérieurement et extérieurement stable.

Tout sommet $\begin{matrix}\text{dans}\\ \text{hors}\end{matrix}$ N est à sortie toute $\begin{matrix}\text{rouge}\\ \text{bleue}\end{matrix}$. car il y a déjà une flèche rouge qui en part !

Comme toute flèche de G à origine dans N est rouge,
son éventuelle extrémité, à sortie bleue, par nucléicité,
se trouve hors N,
prouvant la <u>stabilité interne</u> de N.

Comme tout sommet de G hors N est à sortie bleue,
la nucléicité lui impose au moins une flèche d'entrée rouge,
aussitôt sans origine hors N,
prouvant la <u>stabilité externe</u> de N.

<u>Suffisance</u>

Voici un ensemble intérieurement et extérieurement stable N de graphe G.
On va doter G d'un coloriage nucléique
dont N soit l'ensemble des origines des flèches rouges,

ce qui impose déjà la couleur des flèches non sensorielles

rouge : toute flèche à origine dans N.
bleue : toute flèche à origine hors N.

Reste à colorier les sensorielles
de manière à assurer la nucléicité.

Comme tout sommet dans N est à sortie rouge,
la nucléicité espérée lui signifie entrée toute bleue.
Ses flèches d'entrée non sensorielles,
par stabilité interne, à origine hors N,
étant bienheureusement déjà bleues,
suffit à bleuir ses flèches sensorielles d'entrée.

Comme tout sommet hors N est à sortie bleue,
la nucléicité espérée lui signifie du rouge à l'entrée.
Or par stabilité externe, tout sommet hors N est extrémité
d'une flèche à origine dans N déjà rouge,
ou d'une sensorielle qui ne demande qu'à rougir.

Ainsi s'achève la preuve du théorème de Christine Decaestecker.

Nombre des coloriages nucléiques à noyau donné.

Pour tout noyau N de graphe G,
tout sous-graphe nucléique de G, à domaine N s'obtient
en augmentant l'ensemble obligé des flèches de G à origine dans N,

de tout ou partie de l'ensemble des $\underline{n}$ sensorielles de G
qui partagent leur extrémité avec une flèche à origine dans N,

qui partagent leur extrémité avec une flèche à origine dans N,

(2) et, en tout sommet <u>s</u> de G,

situé hors N et sans flèche d'entrée à origine dans N :

de tout ou partie non vide

de l'ensemble des n_s sensorielles de G d'extrémité <u>s</u>.

Le nombre des sous-graphes nucléiques de G de domaine N

égale donc

$$2^{n} \; . \; *_{s} \; (2^{n_s} - 1)$$

c'est-à-dire 2^{n} fois le produit des facteurs décrits par

$2^{n_s} - 1$ lorsque <u>s</u> parcourt l'ensemble des sommets hors noyau.

EXERCICES.

toute flèche interne est bleue → 1 sensorielle rouge arrive en tout sommet

1. Un graphe contient un noyau vide si et seulement si
ssi $G(\phi) = G_S$
chacun de ses sommets admet au moins
une flèche d'entrée sensorielle.

2. En graphe non vide sans sensorielle, aucun noyau n'est vide.
car impossible d'avoir $G(\phi) = G_S$

3. L'ensemble de tous les sommets d'un graphe en est un noyau
si et seulement si $G(G_S) = \phi$
ce graphe ne comprend aucune flèche interne.

4. Sommet bouclé est interdit de séjour en tout noyau de graphe

5. Toute graphe dont tous les sommets sont bouclés et dont l'un au moins est dépourvu de flèche d'entrée sensorielle est sans noyau.

6. En graphe G dépourvu de sensorielle, un ensemble N de sommets est noyau si et seulement si

$G(N) \cap N = \phi$
$G(N) \cup N = G_s$

intérieurement stable

aucune flèche de G n'a origine et extrémité dans N

extérieurement stable

et tout sommet de G situé hors N est l'extrémité d'au moins une flèche de G à origine dans N

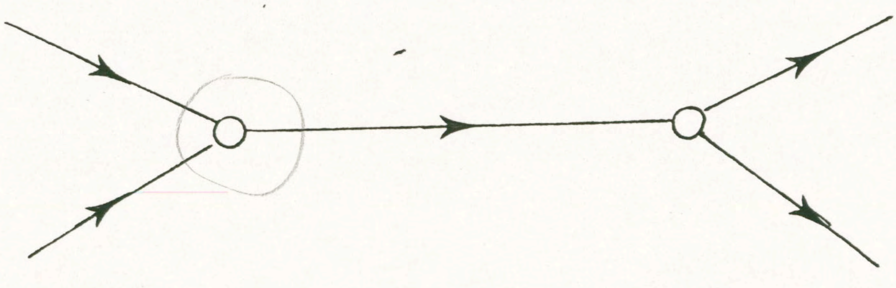
7. En graphe sans sensorielle, tout noyau est le domaine d'un et d'un seul sous-graphe nucléique (évidemment formé par les flèches à origine dans le noyau).

8. Tout noyau de graphe reste noyau quand le graphe s'augmente de sensorielles nouvelles.

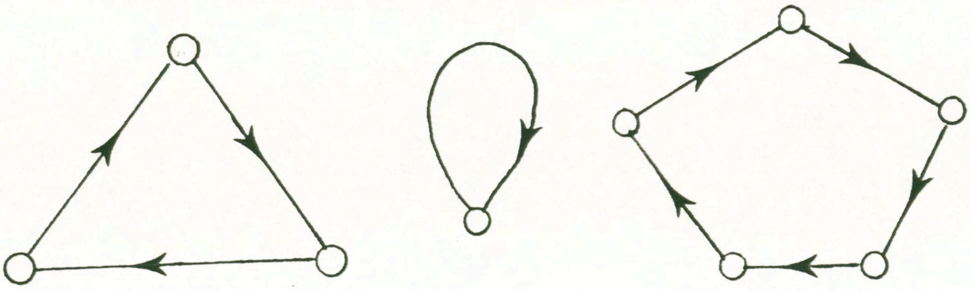
9. Domaine et image de graphe constitué de sommets sont vides.

10. Toute route <u>simple</u> (ne passant jamais deux fois par un même sommet) commençant par une flèche sensorielle et soumise à l'axiome de commodité contient exactement deux sous-graphes nucléiques et deux noyaux.

11. Déterminer les sous-graphes nucléiques et les noyaux de ce petit graphe

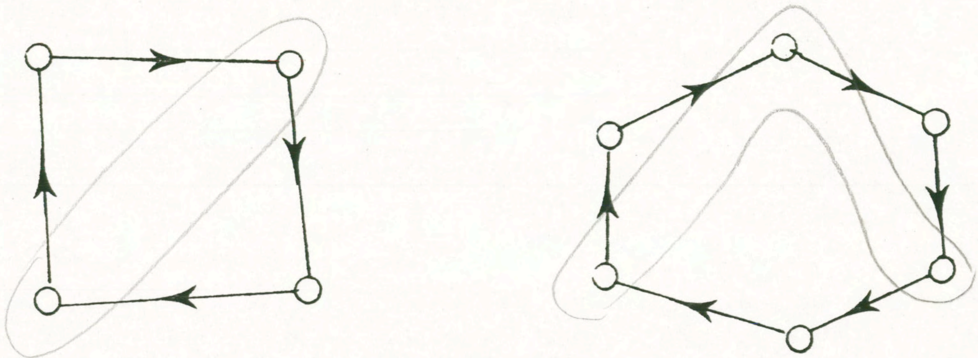


12. Tout cycle à nombre impair de sommets



est sans sous-graphe nucléique, et donc sans noyau.

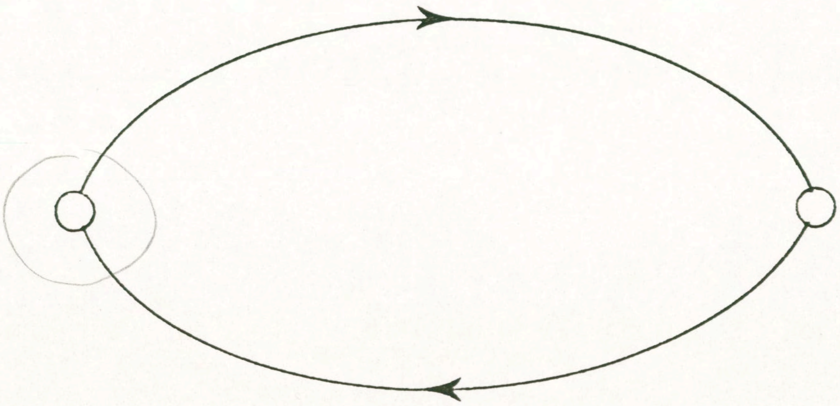
13. Tout cycle à nombre pair de sommets



contient exactement

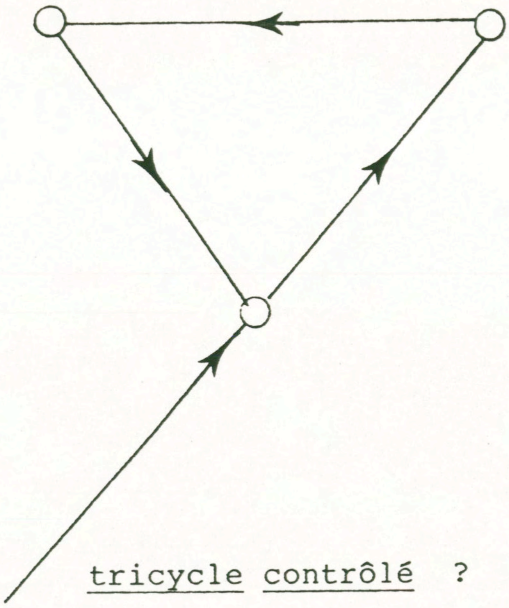
deux sous-graphes nucléiques et deux noyaux.

14. Quels sont les sous-graphes nucléiques et les noyaux du



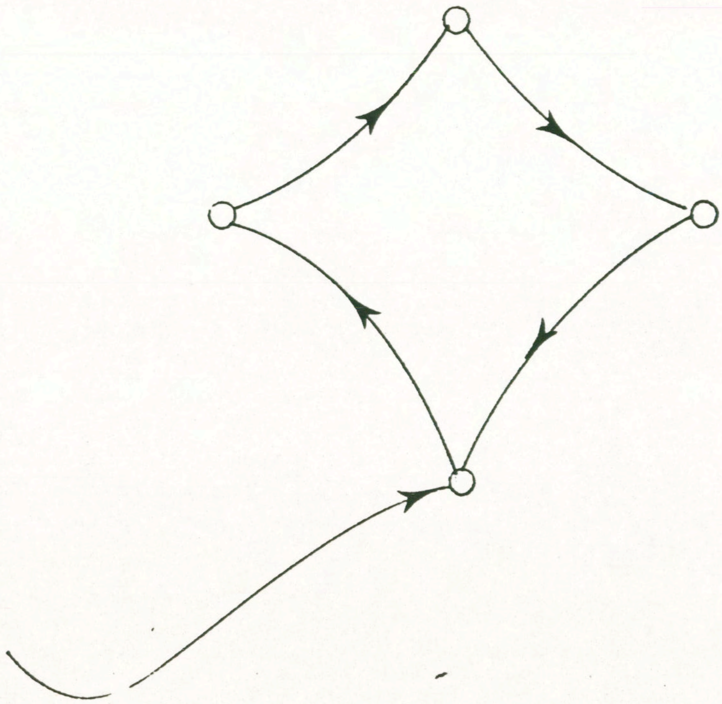
flipflop ?

15. Quels sont les sous-graphes nucléiques et les noyaux de ce



tricycle contrôlé ?

16. Quels sont les sous-graphes nucléiques et les noyaux de ce



quadricycle contrôlé ?